Школа Гармония

РАССМОТРЕНО	СОГЛАСОВАНО	УТВЕРЖДЕНО
на предметной лаборатории	на Педагогическом совете	Приказом директора № 208 от 28.08.2024
Протокол № 1 от 28.08.2024	Протокол № 10 от 28.08.2024	____________ А.Х.Чугалаев

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ОБЩЕРАЗВИВАЮЩАЯ ПРОГРАММА

____ Задачи с параметрами и модулем ________

__________________ 11____________________класс

Составитель: ______Едыгарова Наталья Владимировна__________

________________учитель высшей категории__________ __________

2024-2025 учебный год

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

В соответствии с концепцией модернизации школьного образования элективные курсы являются обязательным компонентом школьного обучения.

Необходимость такого курса вызвана несколькими причинами:

- результаты ЕГЭ приводят к выводу о том, что выпускники испытывают серьезные затруднения при решении уравнений с параметрами.
- необходимостью формирования логического мышления и математической культуры у школьников;
- тесной взаимосвязью таких задач с физическими процессами и геометрическими закономерностями;

Практика работы в школе показывает, что задачи с параметрами и модулем представляют для школьников наибольшую трудность, как в логическом, так и в техническом плане, поэтому уравнения и неравенства, содержащие параметры и модули - это один из труднейших разделов школьного курса математики. В этом случае, кроме использования алгоритмов решения уравнений или неравенств, приходится думать об удачной классификации, следить за тем, чтобы не пропустить множество тонкостей, спрятанных в задаче. Уравнения и неравенства с параметрами и модулями - это тема, где проверяется не «натасканность» ученика, а подлинное понимание им материала. И, естественно, что цена задачи резко возрастает, если в нее включен параметр или модуль, или их конфигурация, и возрастает вдвойне, если задание решено не традиционным, шаблонным, а нестандартным, оригинальным способом.

Данный элективный курс знакомит учащихся с функционально-графическими методами решения алгебраических задач с параметрами и модулем. К сожалению, в школьной программе этим заданиям мало уделяется времени и практикум призван восполнить данный пробел. Одновременно, элективный курс призван, не только дополнять и углублять, знания учащихся, но и развивать их интерес к предмету, любознательность, логическое мышление.

Решение уравнений, неравенств и систем с параметрами и модулем открывает перед учащимися значительное число эвристических приемов общего характера, ценных для математического развития личности, применяемых в исследованиях и на любом другом математическом материале.

Элективный курс позволяет значительно сократить разрыв между требованиями, которые предъявляет своему абитуриенту ВУЗ и требованиями, которые предъявляет к своему выпускнику школа.

Поэтому, *особая установка элективного курса* - подготовка учащихся к конкурсным экзаменам в ВУЗы соответствующего профиля, и поэтому, преподавание должно обеспечить систематизацию знаний и умений, учащихся на уровне, предусмотренном программой вступительных экзаменов, так как учащиеся, владеющие методами решения задач с параметрами, успешно справляются и с другими задачами.

Элективный курс рассчитан на 20 часа учебных занятий в 11 классе общеобразовательных школ.

Этот курс требует от учащихся большой самостоятельной работы, способствует подготовке учащихся к продолжению образования, повышения уровня математической культуры.

Элективный курс имеет прикладное и общеобразовательное значение, способствует развитию логического мышления, концентрации внимания и математической культуры учащихся, расширяет по сравнению с общеобразовательной программой сферу математических знаний, побуждает их к исследовательской деятельности, существенно повышает графическую культуру школьников. Воспитательный эффект курса заключается в формировании таких важных качеств личности, как трудолюбие, целеустремленность, аккуратность.

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА:

- изучение методов решения задач избранного класса и формирование умений, направленных на реализацию этих методов;
- сформировать у учащихся представление о задачах с параметрами и модулем, как задачах исследовательского характера, показать их многообразие;
- научить применять аналитический метод и решение задач с параметрами и модулем;
- научить приемам выполнения изображения на плоскости и их использованию в решении задач с параметрами и модулем;

- научить осуществлять выбор рационального метода решения задач и обосновывать сделанный выбор;

- пробуждение и развитие устойчивого интереса к математике, повышение математической культуры учащихся;
- привитие навыков употребления функционально-графического метода при решении задач;

- способствовать подготовке учащихся к сдаче ЕГЭ по математике.

ТРЕБОВАНИЯ К ЗНАНИЯМ И УМЕНИЯМ**:** в результате изучения курса учащиеся должны уметь

- решать линейные и квадратные уравнения с параметром;
- строить графики элементарных функций, и их комбинации, усложненные модулями;
- решать иррациональные, логарифмические, тригонометрические, показательные уравнения с параметром как аналитически, так и графически;
- применять аппарат алгебры и математического анализа для решения прикладных задач;
- иметь четкое представление о возможностях функционально-графического подхода к решению различных задач.

ОЖИДАЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ: в результате изучения курса учащиеся должны:

- уметь решать линейные, квадратные уравнения и неравенства, система двух линейных уравнений с двумя переменными, несложные иррациональные уравнения с одним параметром при всех значениях параметра;

- использовать в решении задач с параметром свойства квадратичной и линейной функции;

- устанавливать свойства функции $y = x^p$, $y = \sqrt[n]{x}$ и изображать их графики при различных значениях p и n;

- изображать графики функции $y = f(x-a) + b$, $y = af(bx)$ по известному графику функции $y = f(x)$;

- изображать графики функции $y = |f(x)|, y = f(|x|), y = |f(|x|)|$

и уравнений

$|y| = f(x), |y| = |f(x)|, |y| = f(|x|),$
$|y| = |f(|x|)|$ по известному графику функции *y = f(x);*

- использовать графики функции и уравнений при изображении множеств точек плоскости, заданных неравенствами, системами неравенств;
- овладеть методами решения задач с параметрами и модулем с использованием графических интерпретаций;
- осуществлять выбор метода решения задачи и обосновывать его;
- владеть техникой использования каждого метода.

ФОРМЫ КОНТРОЛЯ: домашние контрольные работы, рефераты и исследовательские работы.

СОДЕРЖАНИЕ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА

11 класс (20 часов)

1. Понятие модуля. Решение уравнений по определению модуля (2 часа). Что такое модуль числа? Модули и расстояния. Освобождение от модулей в уравнениях. Методы решения уравнений содержащих несколько модулей. Параллельное раскрытие модулей. Метод интервалов в задачах с модулями. Модули и квадраты.

2. Построение графиков, содержащих знак модуля (2 часа). Графики элементарных функций, содержащие знак модуля, как у аргумента, так и у функции; двойные модули; графики уравнений и соответствий, содержащие знак модуля. Знакомство и работа с компьютерными программами для построения графиков.

3. Решение уравнений с переходом к системе или совокупности уравнений (2 часа). Рациональные уравнения, однородные уравнения, симметрические уравнения, возвратные уравнения. Иррациональные уравнения: простейшие, уравнения с несколькими радикалами, полные квадраты под знаком радикала, замена переменной, посторонние корни, применение свойств функций. Показательные и логарифмические уравнения, тригонометрические уравнения, сводящиеся к квадратным.

Основная цель – систематизировать умения в решении рациональных и иррациональных уравнений; сформировать умения решать уравнения указанных видов с параметрами и модулем.

Изучение темы начинается с повторения курса основной школы – решения линейных, квадратных, дробных, иррациональных уравнений. Решению дробных уравнений предшествует введение понятий равносильности. Его появление требует обработки: основное внимание следует уделить процессу осмысления учащимися выполнение преобразований в ходе решения уравнений, приводящих к равносильным уравнениям.

4. Рациональные неравенства с модулем. Обобщенный метод интервалов (2 часа). Решение неравенств методом интервалов. Неравенства с одним модулем. Освобождение от модуля в неравенствах. Способы решения рациональных неравенств: разложение на множители, выделение полного квадрата, приведение к общему знаменателю и алгебраическое сложение дробей и т.д.

5. **Простейшие задачи с параметрами (1 час).** Понятие параметра. Две основных формы постановки задачи с параметром. Графическая интерпретация задачи с параметром. Методы решения простейших задач с параметрами.

6. **Задачи с параметром, сводящиеся к использованию квадратного трехчлена (2 часа).** Условия существования корней квадратного трехчлена. Знаки корней. Расположение корней квадратного трехчлена относительно точки, отрезка. Графическая интерпретация.

Основная цель – сформировать представление о методах решения задач с параметрами с использованием графических интерпретаций; научить анализировать исходные данные и на основе анализа осуществлять выбор метода решения.

7. Использование графических иллюстраций в задачах с параметрами (2 часа). Решение задач с помощью построения графиков левой и правой части уравнения или неравенства и «считывания» нужной информации с рисунка. Область определения. Множество значений. Четность. Монотонность. Периодичность. Симметрия графика относительно начала координат или оси ординат в зависимости от четности функции.

8. Приемы составления задач с параметрами, используя графики различных соответствий и уравнений. (1 час). Демонстрация приёма составления задач с параметром методом «от картинки к задаче».

9. **Использование ограниченности функций, входящих в левую и правую части уравнений и неравенств (2 часа).** Применение метода оценки левой и правой частей, входящих в уравнение или неравенство. «Полезные неравенства»: сумма двух

взаимно обратных чисел, неравенство для суммы синуса и косинуса одного аргумента, неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим положительных чисел.

10. Метод приведения к уравнению относительно неизвестной x **с параметром** a **(2 часа).** Основные приемы решения уравнений: тождественные преобразования, замена переменной. Равносильность уравнений. Исключение «посторонних» корней. Приемы решения рациональных, иррациональных, показательных и логарифмических уравнений.

11. Сочетание графического и алгебраического методов решения уравнений (2 часа). Основные приемы решения систем уравнений и неравенств: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных. Системы неравенств с одной и двумя переменными. Сравнение графического и алгебраического способов решения уравнений и неравенств. Уравнения, неравенства и системы с параметрами, их решение и исследование.

13. Использование производной при решении задач с параметрами. Задачи на максимум и минимум (2 часа). Производная сложной функции. Производная и касательная. Вторая производная. Исследование функций с помощью производной. Применение производной при решении задач с параметрами. Задачи на максимум и минимум.

14. Комбинированные задачи с модулем и параметрами. Обобщенный метод областей (2 часа). Перенос метода интервалов с прямой на плоскость. Обобщенный метод областей. Нахождение площади фигур, ограниченных неравенством. Применение метода областей к решению уравнений и неравенств с параметрами и модулем, и их комбинации.

ЗАДАЧИ С ПАРМЕТРАМИ И МОДУЛЕМ

ЭЛЕКТИВНЙ КУРС (20 ЧАСОВ)

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ 1 ЧАС В НЕДЕЛЮ

№ п/п	Название темы	основные понятия	часы	лекции	практика	дата	фактич. дата	виды проверочных работ
1	Понятие модуля. Решение уравнений по определению модуля.	модуль	1 ч	0,5	0,5			
2	Построение графиков, содержащих знак модуля	графики	1 ч		1			
3	Решение уравнений с переходом к системе или совокупности уравнений.		2 ч		2			
4	Рациональные неравенства с модулем. Обобщенный метод интервалов.	неравенства с модулем	2 ч		2			
5	Простейшие задачи с параметрами.	параметры	1 ч		1			тест
6	Задачи с параметром, сводящиеся к использованию квадратного трехчлена.	квадратный трехчлен	2 ч		2			д.к.р.
7	Использование графических иллюстраций в задачах с параметрами.	графики	2 ч	1	1			

8	Приемы составления задач с параметрами, используя графики различных соответствий и уравнений.		1 ч		1			тест
9	Использование ограниченности функций, входящих в левую и правую части уравнений и неравенств.	ограничен-ность функции	1 ч	0,5	0,5			
10	Метод приведения к уравнению относительно неизвестной x с параметром a.		2 ч		2			тест
11	Сочетание графического и алгебраического методов решения уравнений.		2 ч		2			
12	Использование производной при решении задач с параметрами. Задачи на максимум и минимум.	максимум, минимум	1 ч	0,5	0,5			
13	Комбинированные задачи с модулем и параметрами. Обобщенный метод областей.	область определения	2 ч	1	1			д.к.р.
	Итого:		20 ч					

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ УЧЕНИКА.

1. Алгебра: Учебник для 7 классов общеобразовательных учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.Н. Нешков, С.Б. Суворова; Под редакцией С.А. Теляковского. -12-е. – М.: Просвещение, 2006.
2. Алгебра: Учебник для 8 классов общеобразовательных учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.Н. Нешков, С.Б. Суворова; Под редакцией С.А. Теляковского. -11-е. – М.: Просвещение, 2005.
3. Алгебра: Учебник для 9 классов общеобразовательных учреждений/ Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.Н. Нешков, С.Б. Суворова; Под редакцией С.А. Теляковского. -10-е. – М.: Просвещение, 2004.
4. Алгебра: 8 класс.: Задачник для общеобразовательных учреждений/ А.Г. Мордкович, Т.Н. Мишустина, Е.Е. Тульчинская. -3-е изд., испр. М.: Мнемозина, 2006.
5. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10-11 кл. общеобразовательных учреждений/ А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудицин и др.; Под редакцией А.Н. Колмогорова. -12-е изд. – М.: Просвещение, 2005.
6. Балаян Э.Н. Микросправочник по математике для выпускников и абитуриентов. Ростов н/Д, 2002.
7. Балаян Э.Н. Репетитор по математике для поступающих в вузы. Ростов н/Д: изд-во «Феникс», 2003.
8. Балаян Э.Н. Математика. Сам себе репетитор. Задачи повышенной сложности. Серия «Абитуриент», Ростов на Дону: Изд-во «Феникс», 2004.
9. ЕГЭ 2010. Математика: репетитор / В.В. Кочагин, М.Н. Кочагина. – М.: Эксмо, 2009. -320с.
10. Лаппо Л.Д., Попов М.А. Математика. Пособие для подготовки к ЕГЭ и централизованному тестированию. М.: изд-во «Экзамен», 2006.

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ.

1. Амелькин В.В., Рабцевич В.Л. Задачи с параметрами: Справочное пособие по математике. – Минск.: Асар, 1996.
2. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И. Алгебра и математический анализ для 10 класса: Учеб. пособие для школ и классов с угулб. изуч. матем. – М.: Просвещение, 1995.
3. Гуськова Л.Н. Уравнения с параметрами. Методическое пособие. Казань 2006.
4. Звавич Л.И., Шляпочник Л.Я. Задачи письменного экзамена по математике за курс средней школы: условия решения. –М.: Школа-Пресс, 1994.
5. Звавич Л.И., Аверьянов Д.И., Пигарев Б.П., Трушанина Т.Н. Задания для проведения письменного экзамена по математике в 9 классе: Пособие для учителя. –М.: Просвещение, 1996.
6. Иванов А.П. Тесты и контрольные работы для систематизации знаний по математике: Учебное пособие для абитуриентов. Ч. 1 и 2. – Пермь: Изд-во Перм. Ун-та, 2000.
7. Литвиенко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия. – М.: ABF, 1995.
8. Лысенко Ф.Ф. ЕГЭ. Тесты. 2010.
9. Федеральный институт педагогических измерений. ЕГЭ математика. Новая версия. 2010.
10. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач: Учебное пособие для 10 класса средней школы. – М.: Просвещение, 1999.
11. Шарыгин И.Ф., Голубев В.И. Решение задач: Учебное пособие для 11 класса общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 1995.
12. Фельдман Я.С., Жаржевский А.Я. Математика. Решение задач с модулями: Пособие для абитуриентов и старшеклассников. – СПб.: Оракул, 1997.

Приложение

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Задание 1. Решите при всех значениях параметра a уравнение $ax = 2x + 5$.

Решение.

Необходимо решить линейное уравнение с параметром. Сначала перенесем все неизвестные слагаемые в левую часть уравнения и приведем подобные слагаемые. Получим $(a – 2)\, x = 5$.

Чтобы найти значение x, в данном случае надо разделить уравнение на $(a – 2)$. При всех ли значениях параметра a мы можем уравнение разделить на $(a – 2)$? Нет.

При $a = 2$ выражение $a – 2$ обращается в нуль, поэтому значение параметров $a = 2$ является «особым» - контрольным значением параметра. Рассмотрим это значение отдельно.

При $a = 2$ $(2 – 2)x = 5;$ $0x = 5$ – уравнение решений не имеет.

Теперь $a \neq 2$, и, чтобы выразить x, делим обе части уравнения на $(a – 2)$.

При $a \neq 2$ получим $x = \dfrac{5}{a-2}$.

Ответ: при $a = 2$ решения нет; при $a \neq 2$ $x = \dfrac{5}{a-2}$.

Задание 2. Решите при всех значениях параметра a неравенство $ax \leq 2x + 5$.

Решение.

Необходимо решить линейное неравенство с параметром. Перенесем все неизвестные слагаемые в левую часть неравенства и приведем подобные слагаемые. Получим $(a – 2)x \leq 5$.

Чтобы найти значение x, надо разделить обе части неравенства на $(a – 2)$. При всех ли значениях параметра a мы можем неравенство разделить на $(a – 2)$?

При $a = 2$ выражение $a – 2$ обращается в нуль.

Рассмотрим это значение отдельно.

При $a = 2$ $(2 – 2)x \leq 5$; $0x \leq 5$. Это неравенство верно при любых значениях x, поэтому решением исходного неравенства при $a = 2$ является промежуток $(-\infty;+\infty)$.

Теперь $a \neq 2$. Для того чтобы выразить x, надо разделить неравенство на $(a – 2)$.

Существенным отличием решения линейного неравенства с параметром от решения линейного уравнения с параметром является то, что знак неравенства при делении обеих частей неравенства на выражение с неизвестным может измениться на противоположный или не изменится.

Поэтому при делении неравенства на выражение с параметром надо учитывать знак этого выражения.

Если $a - 2 < 0$, то знак неравенства придется изменить; если $a - 2 > 0$, то знак неравенства не меняется.

При $a < 2$ $x \ge \frac{5}{a-2}$ (знак неравенства изменился)

При $a > 2$ $x \le \frac{5}{a-2}$ (знак неравенства не изменился).

Ответ: при $a = 2$ $x \in (-\infty;+\infty)$; при $a < 2$ $x \ge \frac{5}{a-2}$; при $a > 2$ $x \le \frac{5}{a-2}$.

Найдите все значения a, при каждом из которых решения неравенства

УРАВНЕНИЕ С МОДУЛЕМ

Уравнения и неравенства с модулем можно решать графически. Для этого выражения, содержащие параметр, переносят в одну часть уравнение (неравенства) и строят графики функции левой и правых частей уравнения (неравенства)

Задание 3. Найдите все значения а, при каждом из которых решения неравенства $|2x-a|+1 \le 1|x+3|$

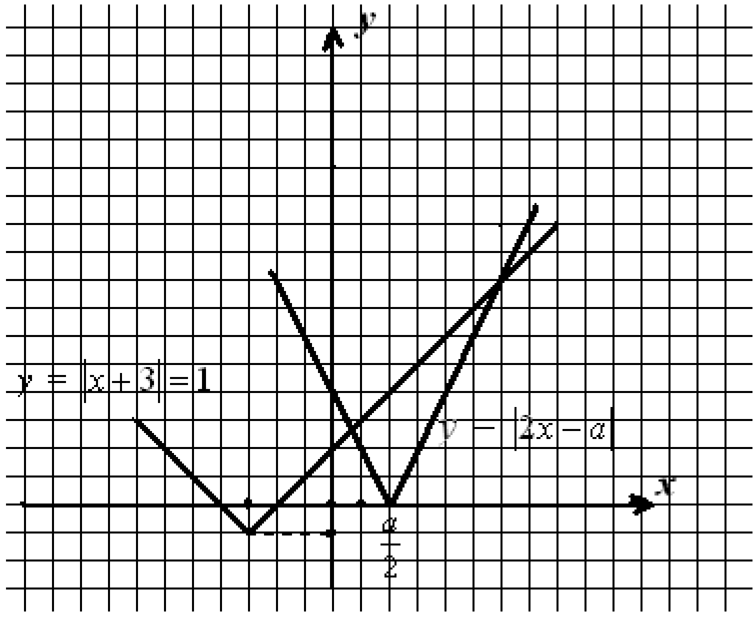
образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем единицу:

$$|2x-a| \le |x+1|-1.$$

Построим схематично графики функции $y=|2x-a|$ и $y=|x+3|-1$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решение только при $\frac{a}{2} \le -4$ или $\frac{a}{2} \ge -2$.

1) $\begin{cases} a \le -8, \\ |2x - a| \le -x - 4; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le -8, \\ 2x - a \le -x - 4, \\ 2x - a \ge x + 4; \end{cases}$ $\begin{cases} a \le -8, \\ x \le \dfrac{a-4}{3}, \\ x \ge a + 4. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины *1*, если $\frac{a-4}{3}$ - *(a + 4) = 1*, откуда

$a = -\frac{19}{2}$.

2) $\begin{cases} a \ge -4, \\ |2x - a| \le x + 2; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge -4, \\ 2x - a \le x + 2, \\ 2x - a \ge -x - 2; \end{cases}$ $\begin{cases} a \ge -4, \\ x \le a + 2, \\ x \ge \dfrac{a-2}{3}. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины *1*, если *a + 2* $-\frac{a-2}{3} = 1$, откуда $a = -\frac{5}{2}$.

Ответ: $a = -\frac{5}{2}$, $a = -\frac{19}{2}$.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Число корней квадратного уравнения определяют по знаку дискриминанта:

Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных корня;

Если $D = 0$, то уравнение имеет один корень (или два совпавших);

Если $D < 0$, то уравнение не имеет корня.

Задание 4. При каких значениях параметра a уравнение $4x^2 - 4ax + 1 = 0$: 1) имеет два различных корня; 2) имеет два корня; 3) не имеет корней?

Решение.

Найдем дискриминант исходного уравнения.

$$D = 16a^2 - 4 \bullet 4 \bullet 1 = 16a^2 - 16.$$

1) Так как уравнение имеет два различных корня, то $D = 16a^2 - 16 > 0,\ a^2 > 1$. Получим

$$a \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty).$$

2) Так как уравнение имеет два корня, не обязательно различных, то $D = 16a^2 - 16 \geq 0,\ a^2 \geq 1$ и $a \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$.

3) Так как уравнение не имеет корней, то $D = 16a^2 - 16 < 0,\quad a^2 < 1$ и $a \in (-1;1)$.

Ответ: при $a \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$ уравнение имеет два различных корня; при $a \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$ уравнение имеет два корня; при $a \in (-1;1)$ уравнение не имеет корней.

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим решение иррационального уравнения с параметром.

Задание 5. Укажите наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение $\sqrt{x+2a} = x-3$ имеет единственное решение.

$$\sqrt{x+2a} = x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \geq 0, \\ x+2a = (x-3)^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x^2 - 7x + 9 - 2a = 0. \end{cases}$$

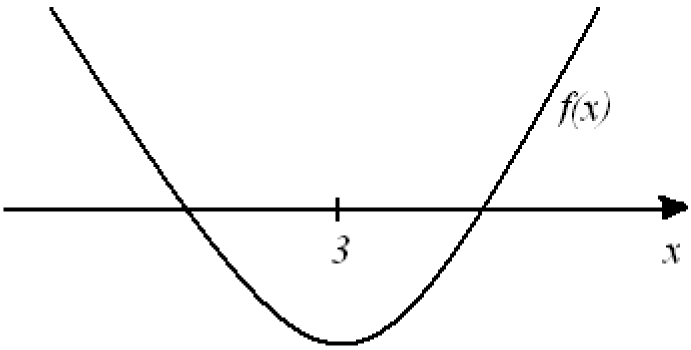
Уравнение имеет единственное решение, если:

1. $D = 0$ и $x_1 = x_2 \geq 3$.
2. $D > 0$ и один из корней меньше 3, а другой больше 3, то есть, как говорят, 3 разделяет корни.

1. $\begin{cases} D = 49 - 4(9 - 2a) = 0? \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{13}{8}, \\ x \geq 3. \end{cases}$

При $a = -\dfrac{13}{8}$ $x_1 = x_2 = \dfrac{7 \pm 0}{2} \geq 3$.

2. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 7x + 9 - 2a$. Изобразим схематично график функции $f(x)$ (параболу) с указанными свойствами (3 разделяет корни).



Имеем следующее условие: $f(3) < 0$.

Решим неравенство: $f(3) < 0$, так как $f(3) = -3 - 2a < 0$, то $a > -1{,}5$.

Итак, условиям задачи удовлетворяют следующие значения a: $a = -\dfrac{13}{8}$, $a > -1{,}5$.

Наименьшее целое из них равно -1.

Ответ: -1.

Задачи с параметром

1. Задача.

При каких значениях параметра a уравнение

$$(a - 1)x^2 + 2x + a - 1 = 0$$

имеет ровно один корень?

1. Решение.

При $a = 1$ уравнение имеет вид $2x = 0$ и, очевидно, имеет единственный корень $x = 0$.
Если $a \neq 1$, то данное уравнение является квадратным и имеет единственный корень при тех значениях параметра, при которых дискриминант квадратного трехчлена равен нулю. Приравнивая дискриминант к нулю, получаем уравнение относительно параметра a

$$4a^2 - 8a = 0,$$

откуда $a = 0$ или $a = 2$.

1. Ответ: уравнение имеет единственный корень при $a \in \{0; 1; 2\}$.

2. Задача.
Найти все значения параметра a, при которых имеет два различных корня уравнение

$$x^2+4ax+8a+3 = 0.$$

2. Решение.
Уравнение $x^2+4ax+8a+3 = 0$ имеет два различных корня тогда и только тогда, когда $D = 16a^2-4(8a+3) > 0$. Получаем (после сокращения на общий множитель 4) $4a^2-8a-3 > 0$, откуда

$$a < 1 - \frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{или} \quad a > 1 + \frac{\sqrt{7}}{2}$$

2. Ответ:

$$a \in \left(-\infty;\ 1 - \frac{\sqrt{7}}{2}\right) \cup \left(1 + \frac{\sqrt{7}}{2};\ \infty\right).$$

3. Задача.
Известно, что

$$f_1(x) = \sqrt{x^2 - 2ax + a^2} + x$$

$$f_2(x) = 6x-x^2-6.$$

а) Постройте график функции $f_1(x)$ при $a = 1$.
б) При каком значении a графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют единственную общую точку?

3. Решение.
3.а. Преобразуем $f_1(x)$ следующим образом

$$f(x) = \sqrt{(x-a)^2} + x = |x-a| + x = \begin{cases} a, & x < a; \\ 2x - a, & x \ge a. \end{cases}$$

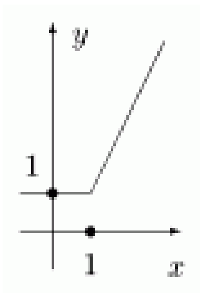


График этой функции при $a = 1$ изображен на рисунке справа.
3.б. Сразу отметим, что графики функций $y = kx+b$ и $y = ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) пересекаются в единственной точке тогда и только тогда, когда квадратное уравнение $kx+b = ax^2+bx+c$имеет единственный корень. Используя представление f_1 из **3.а**, приравняем дискриминант уравнения $a = 6x-x^2-6$ к нулю. Из уравнения $36-24-4a = 0$ получаем $a = 3$. Проделав то же самое с уравнением $2x-a = 6x-x^2-6$ найдем $a = 2$. Нетрудно убедиться, что эти значения параметра удовлетворяют условиям задачи. Ответ: $a = 2$ или $a = 3$.

4. Задача.
Найти все значения a, при которых множество решений неравенства $x^2-2ax-3a \ge 0$ содержит отрезок [3;6].

4. Решение.
Первая координата вершины параболы $f(x) = x^2-2ax-3a$ равна $x_0 = a$. Из свойств

квадратичной функции условие $f(x) \geq 0$ на отрезке [3;6] равносильно совокупности трех систем

$$\begin{cases} a \leq 3, \\ f(3) = 9\text{-}9a \geq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3 < a < 6, \\ D = 4a^2+12a \leq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq 6, \\ f(6) = 36\text{-}15a \geq 0. \end{cases}$$

Решением первой системы является множество $(-\infty,1]$. Вторая и третья система решений не имеют.

4. Ответ: $a \in (-\infty,1]$.

5. Задача (9 кл.)
При каком наименьшем натуральном значении a уравнение

$$x^2+2ax-3a+7 = 2x$$

имеет ровно два решения?

5. Решение.
Перепишем это уравнение в виде $x^2 + (2a-2)x - 3a+7 = 0$. Это квадратное уравнение, оно имеет ровно два решения, если его дискриминант строго больше нуля. Вычисляя дискриминант, получаем, что условием наличия ровно двух корней является выполнение неравенства $a^2+a-6 > 0$. Решая неравенство, находим $a < -3$ или $a > 2$. Первое из неравенств, очевидно, решений в натуральных числах не имеет, а наименьшим натуральным решением второго является число 3.

5. Ответ: 3.

6. Задача (10 кл.)
Найти все значения a, при которых график функции

$$f(x) = \frac{x^2+|ax+2|}{a-1}$$

проходит через точку с координатами (-1;1).

6. Решение.
Из условия $f(-1) = 1$ имеем уравнение

$$1 = \frac{1+|-a+2|}{a-1},$$

или, после очевидных преобразований, $a-2 = |2-a|$. Последнее уравнение равносильно неравенству $a \geq 2$.

6. Ответ: $a \in [2;\infty)$.

7. Задача (10 кл.)
При каких значениях a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2-2ax+a^2-a = 0$$

больше чем 12?

7. Решение.
Дискриминант уравнения $x^2-2ax+a^2-a = 0$ равен $4a$. Поэтому действительные корни этого уравнения существуют, если $a \geq 0$. Применяя к данному уравнению теорему Виета получаем $x_1+x_2 = 2a$ и $x_1 \cdot x_2 = a^2-a$. Отсюда $x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2-2x_1 \cdot x_2 = 2a^2+2a$. Решениями неравенства $2a^2+2a > 12$, удовлетворяющими условию $a \geq 0$, являются числа $a > 2$.

7. Ответ: $a > 2$.